بسم الله الرحمن الرحیم

سایت تخصصی برق

www.power2.ir

reza@power2.ir

فصل اول

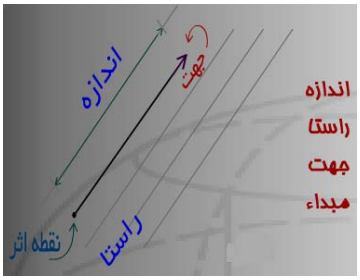
رياضيات برداري

بردارها و اسكالرها

اصولاً كميت‌هاي فيزيكي از نظر معرفي و معين شدن در دو دسته قرار مي‌گيرند: اسكالر و بردار

اسكالر Scalar: به كميت‌هائي اتلاق مي‌شوند كه تنها توسط يك عدد كه همان اندازه آن كميت باشد مشخص مي‌شوند مانند جرم، انرژي و بار الكتريكي

بردار vector: كميت‌هايي هستند كه براي مشخص شدن آنان علاوه بر اندازه، به جهت نيز نيازمند هستند مانند نيرو، شدت ميدان الكتريكي و چگالي جريان حجمي الكتريكي منظور از جهت در اين كلام، معلوم بودن راستا يا محمل بردار، جهت و سمت بردار بر روي اين راستا مي‌باشد. مانند شكل روبرو.



شكل۱

عموماً بمنظور تفكيك نمودن كميت‌هاي اسكالر و برداري از يكديگر بصورت پارامتري و نمادي بطريق زير عمل مي‌شود: كميتهاي اسكالر با حروف كوچك و كميتهاي برداري با حروف بزرگ توأم با علائمي در بالاي آنها مانند:

اسكالر a, b, c, m, n,...

بردار $\vec{A}, \vec{B}, \overline{C}, \overline{\overline{D}}, \hat{F}, A, B, E$

براي نمايش اندازه يك بردار يا حرف مربوطه را بدون علائم بردار بكار مي‌رود و يا از علامت قدر مطلق مانند:

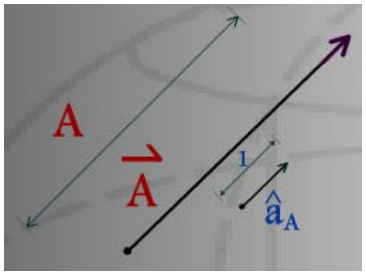
$\vec{F}$ اندازه بردار $= F = |\vec{F}|$

بردار يكان: unit vector

بردار واحد يا بردار يكان يك بردار عبارتست از برداري با اندازه واحد و همجهت با بردار مربوطه براي نمايش اين بردار عموماً از حروف a، u همراه با علامت ^ بر روي آن استفاده مي‌شود. همچنين براي مشخص‌تر شدن آن از يك انديس مشابه با اسم بردار اصلي بهمراه حروف u و a نيز استفاده بعمل مي‌آيد

$\vec{A}$ بردار واحد بردار $= \hat{u}_A = \hat{a}_A$

بنابراين $\hat{a}_A = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$



شکل۲

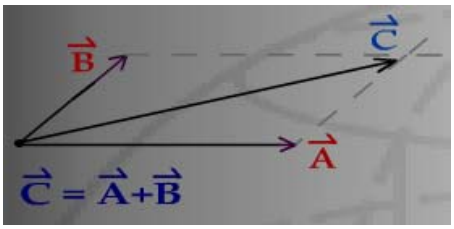
جبر بردارها vector Algebra

چهار عمل اصلي در رياضيات برداري بصورت زير تعريف مي‌شوند:

- جمع بردارها:

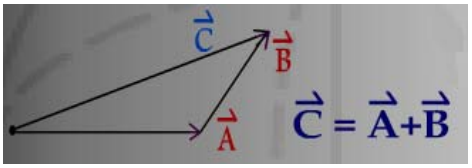
از نظر گرافيكي (هندسي) جمع چند بردار به دو روش انجام مي‌گيرد:

روش اول تشكيل متوازي‌الاضلاع است.

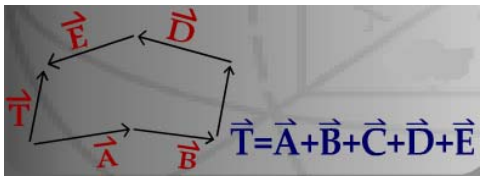


شكل ۳

روش دوم روش چند ضلعي يا روش سربه‌دم است.



شكل ٤



شكل ٥

از نظر تحليلي جمع دو بردار پس از تجزيه آندو به مؤلفه‌هاي هم جهت، مي‌توان با جمع جبري مؤلفه‌هاي هم جهت دو بردار عمل جمع را انجام داد.

$$\vec{A}+\vec{B}=?$$

$$\vec{A}=A_1\hat{a}_1+A_2\hat{a}_2+A_3\hat{a}_3$$

$$\vec{B}=B_1\hat{a}_1+B_2\hat{a}_2+B_3\hat{a}_3$$

$$\vec{A}+\vec{B}=(A_1+B_1)\hat{a}_1+(A_2+B_2)\hat{a}_2+(A_3+B_3)\hat{a}_3$$

در جمع بردارها خاصيت جابجائي و شركت‌پذيري صادق هستند.

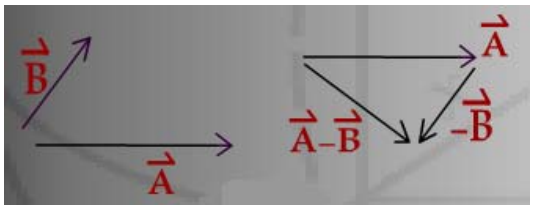
$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

$$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$$

- **تفريق بردارها**

در اين عمل بردار $\vec{A}$ را با معكوس شده بردار $\vec{B}$ جمع مي‌شود

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$



شكل ٦

ضرب بردارها

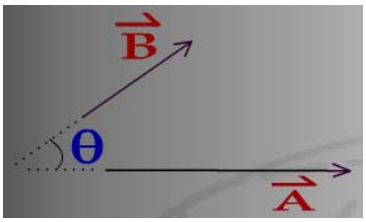
الف- ضرب دو بردار:

١ – ضرب داخلي دو بردار

نتيجه ضرب داخلي دو بردار يك اسكالر مي‌باشد، مانند:

$$C=\vec{A}.\vec{B}=AB\cos\theta$$ [θ كوچكترين زاويه بين دو بردار است]

بهمين دليل اين نوع ضرب را ضرب اسكالر نيز گفته مي‌شود. همچنين چون در نمايش اين ضرب از علامت نقطه بعنوان عمليات ضرب استفاده مي‌شود، به آن ضرب نقطه‌اي نيز گفته شده است. Scalar product , Dot product



شكل ٧

از خواص اين نوع ضرب جابجايي و توزيع‌پذيري است.

$$\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$$

$$\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}.\vec{B})+(\vec{A}.\vec{C})$$

مهمترين كاربرد اين ضرب يافتن مؤلفه يا تصوير يك بردار در جهت (راستا) خاصي است: كافي است بردار واحد آن جهت خاص را در بردار مذكور ضرب داخلي كرد.

مثال:

$$\vec{A}=A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z$$

با توجه به عمود بودن بردارهاي واحد سه جهت z, y, x بر هم داريم:

$$\vec{A}.\hat{a}_x=A_x\hat{a}_x.\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y.\hat{a}_x+A_z\hat{a}_z.\hat{a}_x=(A_x\times 1)+(A_y\times 0)+(A_z\times 0)=A_x$$

همچنين:

$$A_y=\hat{a}_y.\vec{A} \quad , \quad A_z=\hat{a}_z.\vec{A}$$

و یا بطور کلي: مؤلفه بردار $\vec{A}$ در جهت و راستاي بردار $\vec{B}$: $A_B = \hat{a}_B.\vec{A}$

بنابراین واضح است که: $A^2 = \vec{A}.\vec{A} = |\vec{A}||\vec{A}|\cos o^\circ$

۲- ضرب خارجي

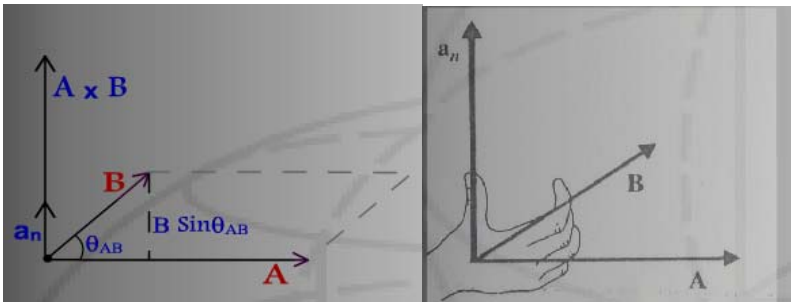
نتیجه این ضرب یك بردار است و چون در نمایش آن از علامت کراس X استفاده مي‌شود به آن ضرب کراس نیز گفته مي‌شود Cross product

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$C = |\vec{C}| = AB\sin\theta_{AB}$$

θ_{AB} کوچکترین زاویه بین $\vec{B},\vec{A}$ است که بردار $\vec{A}$ را در امتداد بردار $\vec{B}$ قرار مي‌دهد.

جهت بردار $\vec{C}$ بر دو بردار $\vec{B},\vec{A}$ عمود است و طبق قانون دست راست بدست مي‌آید.



شکل ۸

واضح است که:

$$\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{A} \times \vec{B}$$

همچنین خاصیت توزیع‌پذیري در ضرب خارجي وجود دارد:

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$$

ب- ضرب یك اسکالر در یك بردار

این ضرب بصورت روبرو نمایش داده مي‌شود: $m\vec{A} = mA\hat{a}_A$

نتیجه این ضرب بردار است با اندازه m برابر $\vec{A}$ و چنانچه m مثبت باشد بردار نهائي هم جهت و در غیر اینصورت در خلاف جهت بردار $\vec{A}$ خواهد بود.

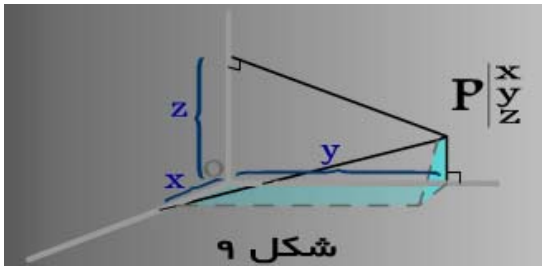
تقسیم: نها تعریفي که در مورد تقسیم در مبحث بردارها وجود دارد تقسیم یك بردار بر یك اسکالر است که همان مفهوم ضرب یك اسکالر در بردار را دارد: $\frac{\vec{A}}{m} = \frac{1}{m}\vec{A} = \frac{A}{m}\hat{a}_A$

دستگاه‌هاي مختصات متعامد Orthogonal coordinate systems

در این درس سه دستگاه مختصات سه بعدي که سه جهت آن بر هم عمود هستند را مورد بررسي و استفاده قرار مي‌گیرد.

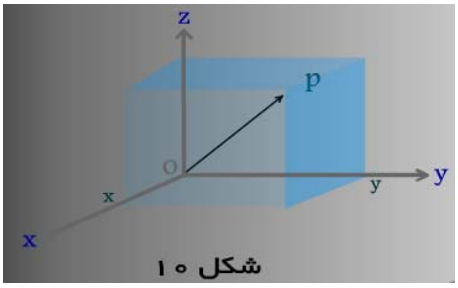
۱ – دستگاه مختصات مستطیلي Rectangular coordinates

بدلیل آنکه با تشکیل یك مکعب مستطیل مي‌توان این دستگاه را برپا کرده و موقعیت نقطه یا مکاني را مشخص نمود، مختصات مستطیلي به آن اتلاق مي‌شود. از دیگر نامهاي این دستگاه دکارتي و کارتزین Cartesian است.



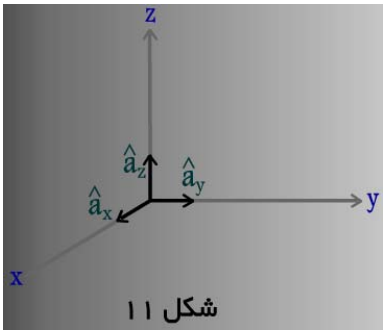
شکل ۹

در اين دستگاه با سه پارامتر x و y و z موقعيت يك نقطه روشن مي‌گردد. سه محور مربوطه در نقطه مبدأ مختصات بر هم عموداند. بنابراين براي يافتن مكان هر نقطه و يا انتهاي هر بردار كافي است كه از آن نقطه بر سه محور عمود كرد. بعنوان مثال نقطه P را در تصوير مشاهده مي‌كنيد. در واقع اين خطوط عمود، قطرهاي سه وجه از ٦ وجه يك مكعب مستطيل است كه مبدأ مختصات (O) و نقطه Pدر ابتدا و انتهاي قطر اصلي (بزرگ) آن واقع شده است.



شکل ۱۰

بردارهاي يكان سه جهت عبارتند از $\hat{a}_z, \hat{a}_z, \hat{a}_x$ و هر كدام با اندازه واحد و در جهت مثبت سه محور z, y, x و منطبق با سه محور فوق خواهند بود. كه بنابراين بر هم عمودند. پس:



شکل ۱۱

$$\hat{a}_x.\hat{a}_x = \hat{a}_y.\hat{a}_y = \hat{a}_z.\hat{a}_z = 1\times 1\times \cos 0 = 1$$

$$\hat{a}_x.\hat{a}_y = \hat{a}_x.\hat{a}_z = \hat{a}_y.\hat{a}_z = 1\times 1\times \cos 90 = 0$$

$$\hat{a}_x \times \hat{a}_x = \hat{a}_y \times \hat{a}_y = \hat{a}_z \times \hat{a}_z = 0$$

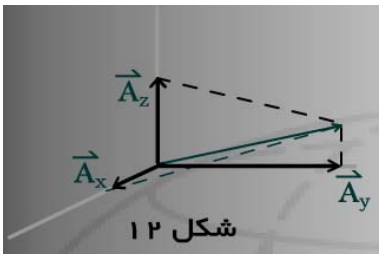
$$\hat{a}_x \times \hat{a}_y = \hat{a}_z \quad , \quad \hat{a}_y \times \hat{a}_z = \hat{a}_x \quad , \quad \hat{a}_z \times \hat{a}_x = \hat{a}_y$$

نمايش يك بردار در فضاي مختصات مسطيلي بصورت تحليلي:

$$\vec{A} = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z$$

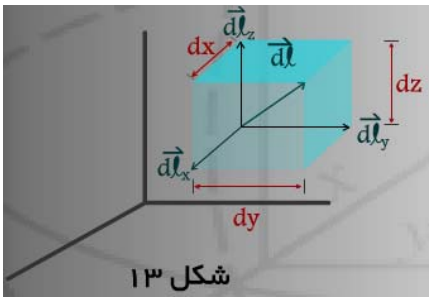
A_z, A_y, A_z بترتيب مؤلفه (تصوير) بردار $\vec{A}$ در سه جهت x و y و z مي‌باشند.

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$



شکل ۱۲

براي يك شكل كوچك ديفرانسيلي با ابعاد d_z, d_y, d_x مي‌توان بردار ديفرانسيلي طولي بقرار زير تعريف نمود.

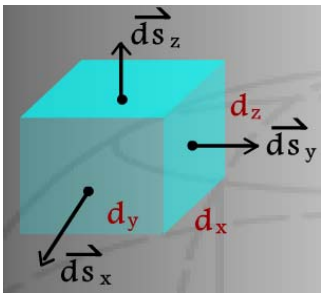


شکل ۱۳

$$d\vec{l} = d\vec{l}_x + d\vec{l}_y + d\vec{l}_z$$
$$d\vec{l}_x = dx\hat{a}_x \quad , \quad dl_x = dx$$
$$d\vec{l}_y = dy\hat{a}_y \quad , \quad dl_y = dy$$
$$d\vec{l}_z = dz\hat{a}_z \quad , \quad dl_z = dz$$

بنابراين:
$$d\vec{l} = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y + dz\hat{a}_z$$

با تعريف بردار نرمال (عمود) بر يك سطح كه عبارتست از برداري كه بر سطح مورد نظر عمود بوده در جهت خارج از سطح است و اندازه آن برابر مساحت آن سطح مي‌باشد، مي‌توان سه بردار نرمال به سطح با توجه به شكل ديفرانسيلي قبل ارائه كرد.



شكل ١٤

$$d\vec{s} = d\vec{s}_x + d\vec{s}_y + d\vec{s}_z$$
$$d\vec{s} = \hat{a}_x dydz \quad , \quad ds_x = dydz$$
$$d\vec{s}_y = \hat{a}_y dxdz \quad , \quad ds_y = dxdz$$
$$d\vec{s}_z = \hat{a}_z dxdy \quad , \quad ds_z = dxdy$$

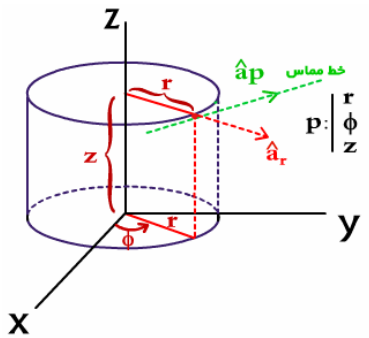
بنابراين:
$$d\vec{s} = \hat{a}_x dydz + \hat{a}_y dxdz + \hat{a}_z dxdy$$

آخرين ترم ديفرانسيلي يك كميت اسكالر است ديفرانسيل حجم مي‌باشد: $dv = dxdydz$

براي مقادير ثابت x يا y يا z ، مكان‌هاي هندسي بوجود مي‌آيد كه متشكل از صفحات مسطح و بينهايت عمود بر سه محور z, y, x خواهد بود.

۲ – دستگاه مختصات استوانه‌اي Cylindrical coordinates

اين داستگاه مختصات سه بعدي بطريقي تعريف مي‌شود كه با برپائي يك شكل استوانه‌اي سه پارامتر نشان دهنده موقعيت يك نقطه را براحتي ميسر مي‌كند و بهمين دليل نام استوانه‌اي به اين دستگاه اتلاق شده است.



شكل ۱۵

سه پارامتر اين دستگاه z,φ,r است.

r فاصله عمودي از محور zهاست.

φ زاويه‌اي است كه تصوير r بر روي صفحه افق (xy) با جهت مثبت محور x مي‌سازد.

z همان كميت (پارامتر) سوم مختصات مستطيلي است.

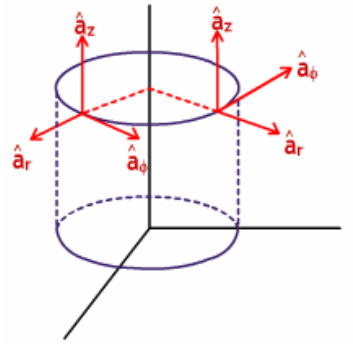
بنابراين مي‌توان استوانه‌اي تصور و رسم نمود كه شعاع قاعده آن r محور استوانه محور zها قاعده بالاي آن در موقعيت z=z قاعده پائين استوانه در سطح افقي واقع شده است و نقطه P روي لبه آن استوانه مستقر مي‌شود (ارتفاع استوانه برابر با z با پارامتر سوم مختصات نقطه P مي‌باشد) محدوده z,φ,r با توجه به تعريف انجام شده:

$$0 \le r \langle \infty \quad , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad , \quad -\infty \langle z \langle +\infty$$

براي يافتن بردارهاي واحد سه جهت مربوطه يعني بترتيب $\hat{a}_z,\hat{a}_\varphi,\hat{a}_r$ كافي است در نقطه P در امتداد شعاع r در جهت دور شدن از محور z به اندازه واحد، بردار $\hat{a}_r$ را بدست آوريد.

اگر بر سطح استوانه و در نقطه P مماسي رسم گردد، امتداد اين مماس راستاي $\hat{a}_\varphi$ خواهد بود و جهت مثبت آن در جهت دور شدن از جهت مثبت محور xهاست. بنابراين واضح است كه $\hat{a}_\varphi,\hat{a}_r$ بر خلاف بردارهاي واحد مختصات مستطيلي وابسته به مكان خواهند بود.

$\hat{a}_z$ مشابه دستگاه مختصات مستطيلي تعريف مي‌شود.



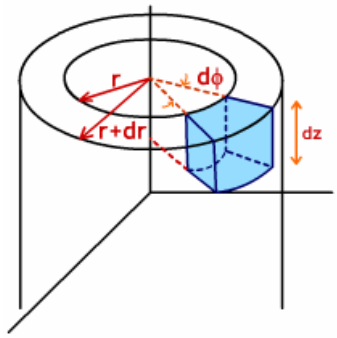
شكل ۱۶

مشابه مختصات مستطيلي در اين مختصات داريم:

$$\vec{A} = A_r \hat{a}_r + A_\varphi \hat{a}_\varphi + A_z \hat{a}_z$$

$$A = \sqrt{A_r^2 + A_\varphi^2 + A_z^2}$$

براي تعريف بردارهاي ديفرانسيلي طولي و سطحي بايستي قسمتي از فضاي بين دو استوانه هم محور با اختلاف شعاع قاعده برابر با dr را در نظر گرفت اين حجم ديفرانسيلي كه داراي ارتفاعي برابر با dzاست در دهانه $d\varphi$ واقع مي‌شود.



شكل ۱۷

بنابراين بردار ديفرانسيل طولي:

$$d\vec{l} = d\vec{l}_r + d\vec{l}_\varphi + d\vec{l}_z$$

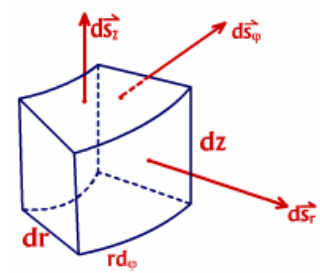
$$d\vec{l}_r = dr\hat{a}_r \quad , \quad dl_r = dr$$

$$d\vec{l}_\varphi = rd\varphi\hat{a}_\varphi \quad , \quad dl_\varphi = rd\varphi$$

$$d\vec{l}_z = dz\hat{a}_z \quad , \quad dl_z = dz$$

توجه داريم كه چون $d\varphi$ اندازه يك زاويه (برحسب راديان) است نمي‌تواند بعنوان طول در نظر گرفته شود. بنابراين با توجه به كمان روبرو به زاويه $d\varphi$ از شعاع دايره r آنرا به طول تبديل كرده‌ايم.

بردارهاي ديفرانسيلي سطحي



شكل ۱۸

$$d\vec{s} = d\vec{s}_r + d\vec{s}_\varphi + d\vec{s}_z$$

$$d\vec{s}_r = \hat{a}_r rd\varphi dz \quad , \quad ds_r = rd\varphi \times dz$$

$$d\vec{s}_\varphi = \hat{a}_\varphi drdz \quad , \quad ds_\varphi = dr \times dz$$

$$d\vec{s}_z = \hat{a}_z rdrd\varphi \quad , \quad ds_z = rd\varphi \times dr$$

براي كميت اسكالر ديفرانسيلي حجم در اين مختصات $dv = rdrd\varphi dz$ كه از ضرب سه بعد شكل ديفرانسيلي فوق يعني dr و $rd\varphi$ و dz بدست آمده است.

همچنين در خصوص ضرب داخلي و ضرب خارجي بردارهاي يكان اين دستگاه با توجه به متعامد بودن سه جهت:

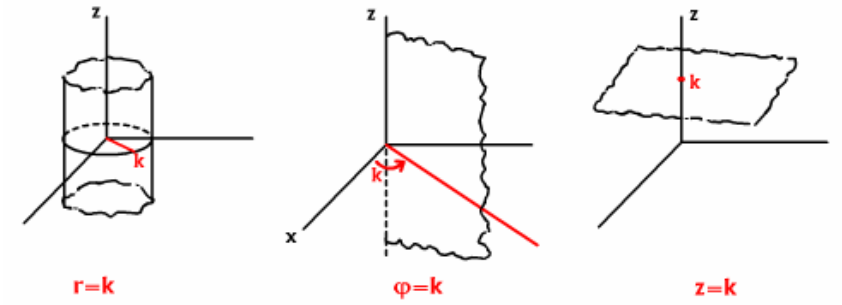
$$\hat{a}_r.\hat{a}_r = \hat{a}_\varphi.\hat{a}_\varphi = \hat{a}_z.\hat{a}_z = 1$$
$$\hat{a}_r.\hat{a}_\varphi = \hat{a}_r.\hat{a}_z = \hat{a}_\varphi.\hat{a}_z = 0$$
$$\hat{a}_r \times \hat{a}_\varphi = \hat{a}_z \quad , \quad \hat{a}_\varphi \times \hat{a}_z = \hat{a}_r \quad , \quad \hat{a}_z \times \hat{a}_r = \hat{a}_\varphi$$

در اين مختصات براي پارامترهاي ثابت مكان هندسي خاصي را حاصل مي‌كند كه بقرار زير است:

براي r=k: سطح جانبي يك استوانه نامحدود با محوريت محور zها خواهد بود كه شعاع قاعده آن k مي‌باشد.

براي $\varphi = k$: يك نيم صفحه بينهايت، مسطح و محدود به محور zهاست كه در زاويه $\varphi = k$ قرار گرفته است.

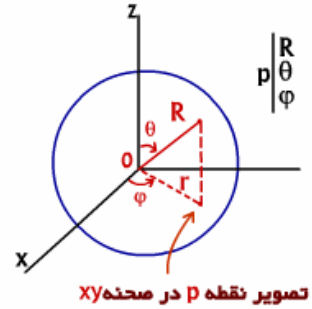
براي z=k: مشابه مختصات مستطيلي يك صفحه بينهايت، مسطح در ارتفاع z=k خواهد بود.



شكل ۱۹

۳ – دستگاه مختصات كروي Spherical coordinates

اين دستگاه در فضاي سه بعدي داراي سه پارامتر φ, θ, R است و چون با مرور كردن يك كره به شعاع R بمركز مبدأ مختصات از نقطه مورد نظري كه مي‌خواهيم مختصات آنرا نمايش دهيم تعريف مي‌شود بنابراين بنام مختصات كروي موسوم است.



R فاصله نقطه تا مبدأ مختصات است.

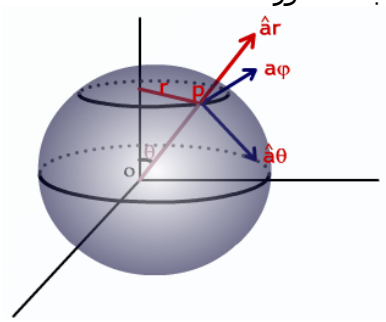
θ زاويه بين R و جهت مثبت محور zهاست.

و φ همان تعريف در مختصات استوانه‌اي را داراست يعني از تصوير كردن R در صفحه xy به r رسيده زاويه بين r و جهت مثبت محور xها زاويه φ خواهد بود.

بنابراين طبق تعاريف انجام شده محدوده سه پارامتر اين مختصات عبارتنداز:

$$0 \le R \langle \infty \quad , \quad 0 \le \theta \le \pi \quad , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

بردارهاي واحد سه جهت تعريف شده بصورت زير بدست مي‌آيند كه بر هم عمودند.
چنانچه مركز o را به نقطه Pمتصل نمود ادامه دهيم، امتداد $\hat{a}_R$ بدست آمده و جهت آن در جهت دور شدن از مركز خواهد بود. حال اگر بر اين امتداد عمودي رسم نمائيم كه بر كره به شعاع R مماس بوده و در صفحه‌اي كه شامل محور zو خط R باشد، واقع گردد امتداد $\hat{a}_\theta$ مي‌دهد و جهت مثبت آن در جهت دور شدن از محور Z+ است. چنانچه بر سطح كره به شعاع Rدر نقطه P مماسي بموازات صفحه افق رسم شود $\hat{a}_\varphi$را بدست مي‌آوريم كه جهت مثبت آن در جهت دور شدن از قسمت مثبت محور xهاست.



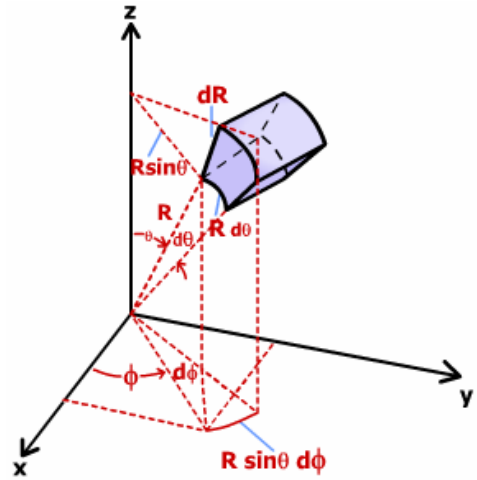
شكل ۲۰

ملاحظه مي‌شود كه در اين دستگاه مختصات هر سه بردار واحد وابسته به مكان خواهد بود يعني با تغيير نقطه P و يا انتهاي هر بردار در اين دستگاه بردارهاي $\hat{a}_\varphi, \hat{a}_\theta, \hat{a}_R$ ممكن است تغيير بنمايند. براي يك بردار مانند بردار $\vec{A}$

$$\vec{A} = A_R \hat{a}_R + A_\theta \hat{a}_\theta + A_\varphi \hat{a}_\varphi$$

$$A = \sqrt{A_R^2 + A_\theta^2 + A_\varphi^2}$$

بردارهاي ديفرانسيلي طولي و سطحي را مي‌توان از حجم ديفرانسيلي كه محصور بين دو كره هم مركز با شعاع‌هاي R و R+dR است و محدود در زواياي $d\varphi, d\theta$ مي‌باشد بدست آورد.



شكل ۲۱

بنابراين بردار ديفرانسيلي طولي

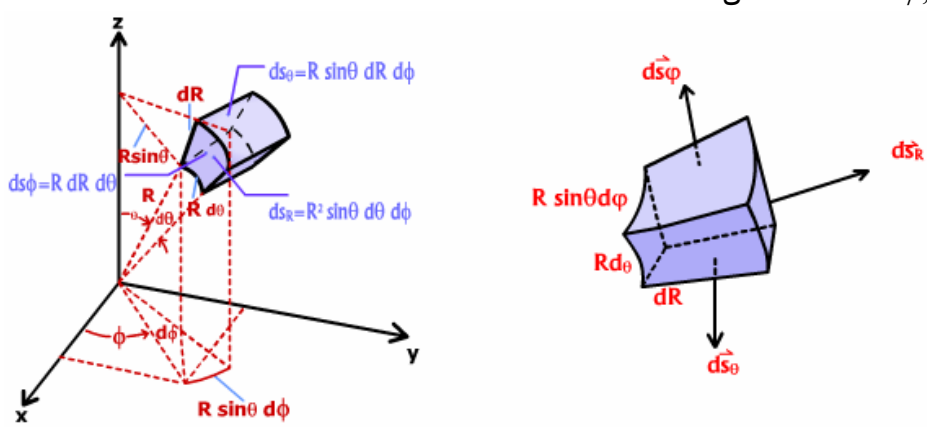
$$d\vec{l} = d\vec{l}_R + d\vec{l}_\theta + d\vec{l}_\varphi$$

$$d\vec{l}_R = \hat{a}_R dR \quad , \quad dl_R = dR$$
$$d\vec{l}_\theta = \hat{a}_\theta R d\theta \quad , \quad dl_\theta = R d\theta$$
$$d\vec{l}_\varphi = \hat{a}_\varphi R \sin\theta d\varphi \quad , \quad dl_\varphi = r d\varphi = R \sin\theta d\varphi$$

همچنين بردار ديفرانسيلي نرمال به سطح:

$$d\vec{s} = d\vec{s}_R + d\vec{s}_\theta + d\vec{s}_\varphi$$
$$d\vec{s}_R = \hat{a}_R R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \quad , \quad ds_R = R\sin\theta d\varphi \times R d\theta$$
$$d\vec{s}_\theta = \hat{a}_\theta R \sin\theta dR d\varphi \quad , \quad ds_\theta = R\sin\theta d\varphi \times dR$$
$$d\vec{s}_\varphi = \hat{a}_\varphi R dR d\theta \quad , \quad ds\varphi = R d\theta \times dR$$

براي كميت اسكالر ديفرانسيلي حجم $dv = R^2 \sin\theta dR d\theta d\varphi$ كه از حاصل ضرب سه بعد $R\sin\theta d\varphi, R d\theta, dR$ حاصل شده است.



شكل ۲۲

در اين مختصات نيز ضرب‌هاي داخلي و خارجي بردارهاي واحد سه جهت عمود بر هم بصورت زير بدست مي‌آيند.

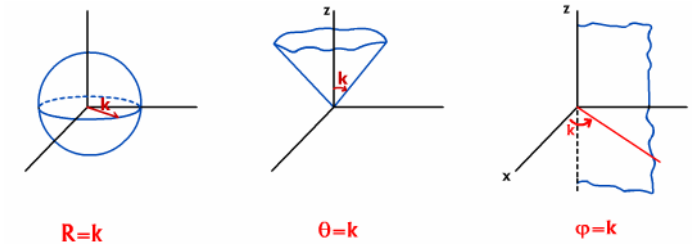
$$\hat{a}_R.\hat{a}_R = \hat{a}_\theta.\hat{a}_\theta = \hat{a}_\varphi.\hat{a}_\varphi = 1$$
$$\hat{a}_R.\hat{a}_\theta = \hat{a}_R.\hat{a}_\varphi = \hat{a}_\theta.\hat{a}_\varphi = 0$$
$$\hat{a}_R \times \hat{a}_\theta = \hat{a}_\varphi \quad , \quad \hat{a}_\theta \times \hat{a}_\varphi = \hat{a}_R \quad , \quad \hat{a}_\varphi \times \hat{a}_R = \hat{a}_\theta$$

مكان هندسي پارامترهاي ثابت در اين دستگاه مختصات طبق تعاريف قبلي بصورت زير بدست مي‌آيند.

براي R=k كره‌اي خواهد بود به شعاع k بمركز مبدأ مختصات

براي $\theta = k$ مخروط واروني با زاويه رأس K واقع در مبدأ مختصات كه داراي ابعاد بينهايت است.

براي $\varphi = k$ مشابه مختصات استوانه‌اي، نيم صفحه بينهايت و محدود به محور zهاست كه در زاويه $\varphi = k$ قرار گرفته است.



شكل ۲۳

تبديل مختصات مستطيلي، استوانه‌اي و كروي به يكديگر

گاهي اوقات بايستي مختصات نقطه‌اي كه در دستگاه مختصات نمايش داده شده است در دستگاه ديگري بيان شود و يا نمايش تحليلي بردار را در مختصات ديگري ارائه شود كه عمده‌ترين علت جمع و يا تركيب دو برداري است كه در دستگاه مختصاتي ارائه شده‌اند كه بردارهاي واحد آنها تابع مكان هستند يعني: $\hat{a}_r, \hat{a}_\varphi, \hat{a}_R, \hat{a}_\theta$

بنابراين نيازمند تبديل پارامترها و مؤلفه‌هاي مختلف در يك دستگاه به دستگاه ديگر است.

-تبديل مختصات استوانه‌اي به مستطيلي و برعكس

تبديل متغير يا پارامترهاي مختصات استوانه‌اي به مستطيلي:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$

برعكس:

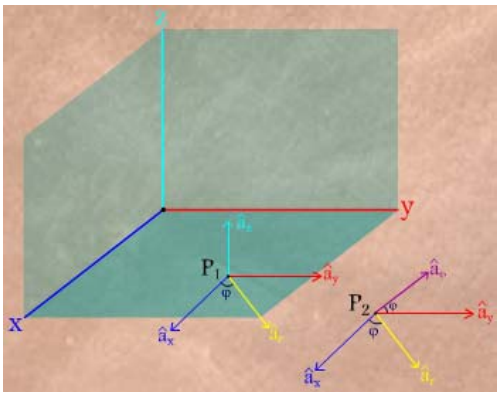
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \tan^{-1} y/x$$
$$z = z$$

اگر $\vec{A} = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z$

براي رسيدن به نمايش اين بردار در مختصات استوانه‌اي بايد A_z, A_φ, A_r را بدست آورد.

بنابراين: $A_r = \hat{a}_r.\vec{A} \quad , \quad A_\varphi = \hat{a}_\varphi.\vec{A} \quad , \quad A_z = \hat{a}_z.\vec{A}$

$$A_r = \hat{a}_r.(A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z)$$
$$= A_x\hat{a}_r.\hat{a}_x + A_y\hat{a}_r.\hat{a}_y + A_z\hat{a}_r.\hat{a}_z$$



$$\hat{a}_r.\hat{a}_x = 1\times 1\times\cos\varphi$$
$$\hat{a}_r.\hat{a}_y = \cos(90-\varphi) = \sin\varphi$$
$$\hat{a}_r.\hat{a}_z = 0$$
$$\hat{a}_\varphi.\hat{a}_x = \cos(90+\varphi) = -\sin\varphi$$
$$\hat{a}_\varphi.\hat{a}_y = \cos\varphi$$
$$\hat{a}_\varphi.\hat{a}_z = 0$$
$$\hat{a}_z.\hat{a}_x = \hat{a}_z.\hat{a}_y = 0 \quad , \quad \hat{a}_z.\hat{a}_z = 1$$

ماتریس تبدیل مختصات مستطیلي به استوانه‌اي:

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

و برعکس:ماتریس تبدیل مختصات استوانه‌اي به مستطیلي:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$

مثال: مطلوبست نمایش بردار $\vec{A}$ در مختصات مستطیلي:

$$\vec{A} = \hat{a}_r 3\cos\varphi - \hat{a}_\varphi 2r + \hat{a}_z 5$$

بنابراین

$$A_r = 3\cos\varphi \quad , \quad A_\varphi = -2r \quad , \quad A_z = 5$$

روش اول:

$$A_x = \hat{a}_x.\vec{A} = \hat{a}_x.\left(\hat{a}_r 3\cos\varphi - \hat{a}_\varphi 2r + \hat{a}_z 5\right)$$

$$= \hat{a}_x.\hat{a}_y 3\cos\varphi - \hat{a}_x.\hat{a}_\varphi 2r + \hat{a}_x.\hat{a}_z$$

$$= \cos\varphi \times 3\cos\varphi - (-\sin\varphi)2r + 0 = 3\cos^2\varphi + 2r\sin\varphi$$

$$A_y = \hat{a}_y.\vec{A} = 3\sin\varphi\cos\varphi - 2r\cos\varphi$$

$$A_z = \hat{a}_z.\vec{A} = 5$$

سپس پارامترهاي موجود در مؤلفه‌هاي بدست آمده را به مختصات مستطیلي تبدیل مي‌کنیم:

$$A_x = 3\frac{x^2}{x^2+y^z} + 2y \quad , \quad A_y = 3\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \times \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2x = \frac{3xy}{x^2+y^2} - 2x$$

بنابراین:

$$\vec{A} = \hat{a}_x\left(\frac{3x^2}{x^2+y^2} + 2y\right) + \hat{a}_y\left(\frac{3xy}{x^2+y^2} - 2x\right) + \hat{a}_z 5$$

روش دوم:

استفاده از ضرب ماتریسي:

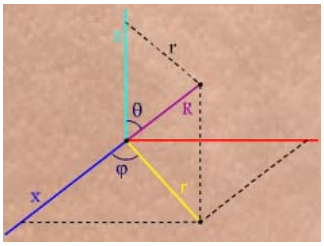
$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\cos\varphi \\ -2r \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cos^2\varphi + 2r\sin\varphi \\ 3\sin\varphi\cos\varphi - 2r\cos\varphi \\ 5 \end{bmatrix}$$

که همان نتیجه روش قبل است.

تمرین: مطلوبست نمایش بردار مکان $\vec{R} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$ در دستگاه مختصات استوانه‌اي

-تبدیل متغیرهاي مختصات کروي به مستطیلي و برعکس

تبدیل متغیرهاي مختصات کروي به مستطیلي



$$x = R\sin\theta\cos\theta$$

$$y = R\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = R\cos\theta$$

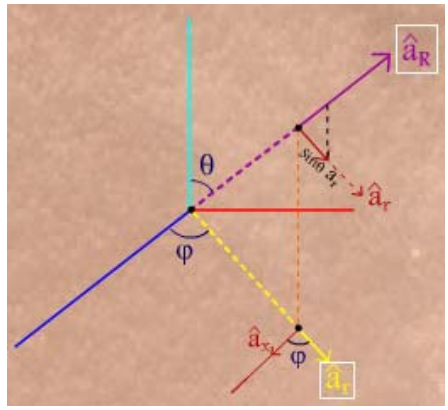
برعكس:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

با توجه به شكل



$$\hat{a}_R.\hat{a}_x = \cos(90-\theta)\hat{a}_r.\hat{a}_x = \sin\theta \times \cos\varphi$$

ماتريس تبديل مختصات مستطيلي به كروي:

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

و برعكس: ماتريس تبديل مختصات كروي به مستطيلي:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$$

مثال:

بردار مكان يك نقطه كلي در مختصات كروي را بدست آوريد:

$$\vec{A} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$$

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\sin\theta\cos\varphi + y\sin\theta\sin\varphi + z\cos\theta \\ y\cos\theta\cos\varphi + y\cos\theta\sin\varphi - z\sin\theta \\ -x\sin\varphi + y\cos\varphi + 0 \end{bmatrix}$$

$$A_R = x\sin\theta\cos\varphi + y\sin\theta\sin\varphi + z\cos$$

$$= R\sin^2\theta\cos^2\varphi + R\sin^2\theta\sin^2\varphi + R\cos^2\theta$$

$$= R\sin^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + R\cos^2\theta$$

$$= R\sin^2\theta + R\cos^2\theta$$

$$= R(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = R$$

و به همین ترتیب $A_\theta = 0 \quad , \quad A_\varphi = 0$

بنابراین: $\vec{A} = R\hat{a}_R$

و یا $\vec{A} = \vec{R}$

-تبديل مختصات كروي به استوانه‌اي و برعكس:

اين تبديل بندرت استفاده مي‌شود:

تبديل پارمترها

$$\begin{cases} r = R\sin\theta \\ \varphi = \varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = \sqrt{r^2 + z^2} \\ \theta = \cos^{-1}\dfrac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \\ \varphi = \varphi \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$$

انتگرال گيري

انتگرال‌هائي كه در ارتباط با بردارها مي‌باشند عبارتند از:

$$\int_c \vec{F}.d\vec{l}$$

$$\int_s \vec{F}.d\vec{s}$$

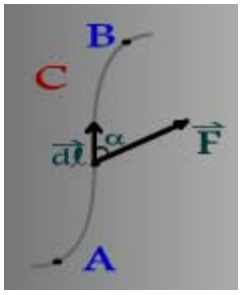
$$\int_v \vec{F}dv$$

$$\int_c f d\vec{l}$$

$$\int_c f d\vec{l} = \int_c f\left(\hat{a}_x + d_x + \hat{a}_y d_y + \hat{a}_z d_z\right) = \hat{a}_x \int_c f(x,y,z)dx + \hat{a}_y \int_c f(x,y,z)dy + \hat{a}_z \int_c f(x,y,z)d_z$$

اما مهمترين انتگرال‌گيري، دو انتگرال اول $\int \vec{F}.d\vec{l}$ و $\int \vec{F}.d\vec{s}$ است كه بترتيب بنام انتگرال خطي و انتگرال سطحي از آن نام مي‌بريم.

انتگرال خطي Line Integral



بعنوان مثال $\int_{c\,A}^{B}\vec{F}.d\vec{l}$ روي مسيري مانند Cبصورت زير انجام مي‌گيرد.

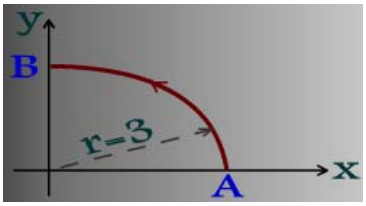
براي محاسبه آن در هر نقطه، مؤلفه $\vec{F}$ را که مماس بر منحني د رآن نقطه است $(F\cos\alpha)$ را بدست آورده در طول dlضرب مي‌کنيم.

که همان مفهوم $\vec{F}.d\vec{l}$ است و نتيجه انتگرال‌گيري تابع اسکالر $F\cos\alpha dl$ از نقطه A تا B خواهد بود.

$$\int_A^B F\cos\alpha dl$$

مفهوم انتگرال خطي: چنانچه بردار $\vec{F}$ نيروي وارد بر جسمي باشد، اين انتگرال ميزان کار لازم براي حرکت جسم روي مسير C از نقطه A به B مي‌باشد که مي‌تواند متناسب با انرژي لازم براي عمليات فوق باشد. $\oint_c \vec{F}.\overrightarrow{dl}$

مثال: براي بردار داده شده $\vec{F}$ مطلوبست محاسبه انتگرال خطي $\int_A^B \vec{F}.d\vec{l}$ در امتداد يك چهارم دايره به شعاع ۳ که در شکل نشان داده شده است.



$$\vec{F}=\hat{a}_x xy-\hat{a}_y 2x \quad , \quad A:\begin{vmatrix}3\\0\\0\end{vmatrix} \quad B:\begin{vmatrix}0\\3\\0\end{vmatrix}$$

روش اول: در مختصات مستطيلي

$$\overrightarrow{dl}=\hat{a}_x dx+\hat{a}_y dy+\hat{a}_z dz$$

$$\vec{F}.\overrightarrow{dl}=xydx-2xdy$$

معادله مسير: دايره‌اي به شعاع ۳ $\quad x^2+y^2=9 \quad , \quad 0\le x,y\le 3$

و چون مسير در ربع اول است x و y هر دو مثبت: $\Rightarrow x=\sqrt{9-y^2} \quad , \quad y=\sqrt{9-x^2}$

بنابراين:

$$\int_A^B\vec{F}.d\vec{l}=\int_A^B(xydx-2ydy)=\int_A^B xydx-\int_A^B 2xdy$$

$$=\int_3^0 x\sqrt{9-x^2}dy-\int_0^3 2\sqrt{9-y^2}dy$$

$$=\left[-\frac{1}{3}\left(9-x^2\right)^{3/2}\right]_3^0-\left[y\sqrt{9-y^2}+9\sin^{-1}\frac{y}{x}\right]_0^3=-9\left(1+\pi/2\right)$$

روش دوم: در مختصات استوانه‌اي

$$\begin{bmatrix}F_r\\F_\varphi\\F_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\-\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}xy\\-2x\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\vec{F}=\hat{a}_r\left(xy\cos\varphi-2x\sin\varphi\right)-\hat{a}_\varphi\left(xy\sin\varphi+2x\cos\varphi\right)$$

$$d\vec{l}=\hat{a}_r dr+\hat{a}_\varphi rd\varphi+\hat{a}_z dz$$

مسیر در موقعیت z=۰ و r=۳ قرار دارد به نحوي که dr=۰ و dz=۰

بنابراین $d\vec{l}\big|_{r=3} \equiv \hat{a}_\varphi 3d\varphi$ در نتیجه در محاسبه $\vec{F}.\overrightarrow{dl}$ تنها مؤلفه F_φ کارساز خواهد بود.

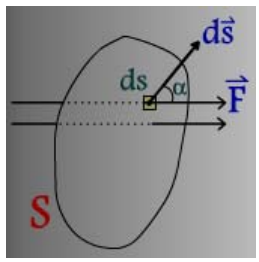
همچنین $x = 3\cos\varphi$ و $y = 3\sin\varphi$ در F_φ جایگزین کرده:

$$\int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -3\left(9\sin^2\varphi\cos\varphi + 6\cos^2\varphi\right)d\varphi = -9\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$$

انتگرال سطحي Surface Integral

طریقه نمایش بصورت روبرو مي‌باشد: $\int_s \vec{F}.\overrightarrow{ds}$

و با توجه به تعریف $d\vec{s}$ که بردار عمود بر سطح در جهت خارج از سطح است مؤ لفه $\vec{F}$ در جهت عمود بر سطح را بدست آورده $(F\cos\alpha)$ در ds ضرب مي‌کنیم و نهایتاً روي سطح s انتگرال مي‌گیریم:

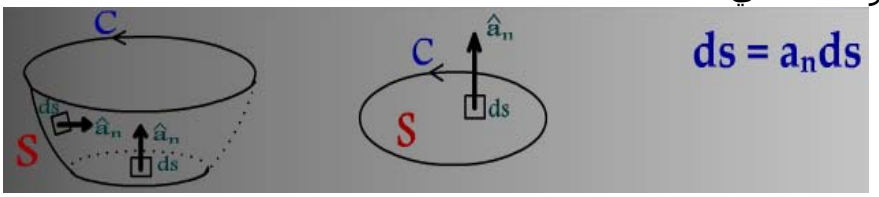


مفهوم انتگرال سطحي: چنانچه $\vec{F}$ بردار نمایش دهنده یك میدان باشد انتگرال $\int_s \vec{F}.\overrightarrow{ds}$ کل فلو (شار) بردار $\vec{F}$ که از سطح S خارج مي شود را محاسبه مي‌نماید.

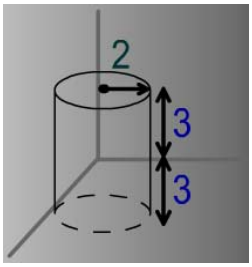
چنانچه سطحs باز باشد از نمایش روبرو استفاده مي کنیم: $\oint \vec{F}.d\vec{s}$

اگر سطح باز باشد جهت $d\vec{s}$ با استفاده از قانون دست راست بدست مي‌آید.

انگشتان دست راست در جهت منحني C که سطح باز S را محصور مي‌کند و انگشت شست جهت $d\vec{s}$ را نشان مي‌دهد.



مثال: محاسبه $\oint_s \vec{F}.d\vec{s}$ روي سطح استوانه داده شده در شکل براي تابع برداري $\vec{F}$:



$$\vec{F} = \hat{a}_r \frac{A}{r} + \hat{a}_z BZ$$

$$\oint_s \vec{F}.\overrightarrow{ds} = \int \vec{F}.\overrightarrow{ds} + \int \vec{F}.\overrightarrow{ds} + \int \vec{F}.\overrightarrow{ds}$$

سطح جانبي قاعده پائین قاعده بالا

$$at \quad z=3 \Rightarrow \hat{a}_n = \hat{a}_z \Rightarrow d\vec{s} = d\hat{s}_z = \hat{a}_z r dr d\varphi$$
$$\Rightarrow \left(\vec{F}.d\vec{s}\right)\Big|_{z=3} = \left(Bzrdrd\varphi\right)\Big|_{z=3} = 3Brdrd\varphi$$
$$\Rightarrow \int_{z=3} \vec{F}.d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 3Brdrd\varphi = 12\pi B$$
$$at \quad z=-3 \Rightarrow \hat{a}_n = -\hat{a}_z \Rightarrow d\vec{s} = -d\vec{s}_z = -\hat{a}_z r dr d\varphi$$
$$\Rightarrow \left(\vec{F}.d\vec{s}\right)\Big|_{z=-3} = -\left(-3Brdrd\varphi\right) = 3Brdrd\varphi$$
$$\Rightarrow \int_{z=-3} \vec{F}.d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 3Brdrd\varphi = 12\pi B$$
$$at \quad r=2 \Rightarrow \hat{a}_n = \hat{a}_r \Rightarrow d\vec{s} = d\vec{s}_r = \hat{a}_r r d\varphi dz$$
$$\left(\vec{F}.d\vec{s}\right)\Big|_{r=2} = \left(\frac{A}{r} r d\varphi r z\right)\Big|_{r=2} = A d\varphi dz$$
$$\Rightarrow \int_{r=2} \vec{F}.d\vec{s} = \int_{-3}^{3} \int_0^{2\pi} A d\varphi dz = 12\pi A$$
$$\Rightarrow \oint \vec{F}.d\vec{s} = 12\pi B + 12\pi B + 12\pi A = 24\pi B + 12\pi A$$

مشتق‌گيري: در اين قسمت به ارائه سه عمل مشتق‌گيري مي‌پردازيم كه دو نوع آن بر روي بردارها صورت مي‌گيرد كه نتيجه يكي اسكالر و ديگري بردار است و نوع سوم مشتق خاصي است كه بر روي اسكالر انجام مي‌شود اما نتيجه آن يك بردار خواهد بود.

ديورژانس (بخش) يك تابع برداري Divergence

تعريف:

$$div.\left(\vec{F}\right) = \nabla.\vec{F} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_s \vec{F}.d\vec{s}}{\Delta v}$$

بنابراين ديورژانس يك تابع برداري با فلوي خروجي از هر متر مكعب برابر مي‌گردد.
با صرفنظر كردن از طريقه عمليات، محاسبة ديورژانس در دستگاههاي مختصات متعامد معرفي شده بصورت زير خواهد بود.

در دستگاه مستطيلي
$$\nabla.\vec{F} = \partial \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

در دستگاه استوانه‌اي
$$\nabla.\vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rF_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

در دستگاه كروي
$$\nabla.\vec{F} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 F_R\right) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin F_\theta\right) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$$

كاربرد: اگر $\vec{V}$ سرعت حركت يك سيال در هر نقطه باشد و ρ چگالي حجمي آن سيال $\nabla.\left(p\vec{v}\right) = 0$ به مفهوم آن خواهد بود كه سيال غير قابل تراكم‌پذيري است يعني شار (فلوي) جرم وارد شده به يك سطح بسته همواره با فلوي خارج شده از آن سطح برابر است و $\nabla.\left(p\vec{v}\right) \langle 0$ نشان دهنده يك مادة قابل انفجار و بعنوان منبع source $\nabla.\left(p\vec{v}\right) \rangle 0$ براي يك فرآيند تراكم پذير نتيجه مي‌دهد و بعنوان حفره و گودال sink است.

کرل (پیچش) يك تابع برداري Curl

تعريف:

$$curl(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F}$$

$$\left(\nabla \times \vec{F}\right)\Big|_s = (\nabla \times \vec{F}).\hat{a}_s = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\oint_c \vec{F} d\vec{l}}{\Delta s}$$

با توجه به تعريف فوق مشخص است كه چنانچه $\vec{F}$ بر روي سطح Δs عمود باشد و يا تصويري نداشته باشد مؤلفه كرل $\vec{F}$ در جهت $\hat{a}_s$ وجود ندارد و يا بعبارتي چرخشي ندارد يعني پيچش اين بردار در جهت $\hat{a}_s$ برابر صفر است. بنابراين مؤلفه كرل هر بردار در هر جهت معياري از چرخش خطوط ميدان برداري فوق در صفحه عمود بر آن جهت است.

$\hat{a}_s$ مي‌تواند $\hat{a}_z, \hat{a}_y, \hat{a}_x$ يا هر جهت ديگر باشد.

در مختصات مستطيلي

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{a}_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) - \hat{a}_y\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) + \hat{a}_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

در مختصات استوانه‌اي

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\varphi r & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\varphi & F_z \end{vmatrix}$$

در مختصات كروي

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{R^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{a}_R & \hat{a}_\theta R & \hat{a}_\varphi R\sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_R & RF_\theta & R\sin F_\varphi \end{vmatrix}$$

گراديان (شيب) Gradient

گراديان بزرگترين مقدار مشتق يك تابع اسكالر نسبت به تغيير مكان مي‌باشد و جهتش در همان سمتي كه بزرگترين مقدار مشتق نسبت به تغيير مكان اتفاق مي‌افتد مي‌باشد بنابراين گراديان يك مشتق گيري جهتي است. directional derivative

براي درك مفهوم گراديان تابع اسكالر ϕ را در نظر بگيريد:

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta l}$$

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$$

اگر Δl كمترين مقدار باشد، $\frac{\Delta\phi}{\Delta l}$ بزرگترين تغييرات (مشتق) را خواهد داشت براي محاسبه بيشترين تغييرات بايد $\Delta l = \Delta n$ شود:

$$\left.\frac{\Delta\phi}{\Delta l}\right|_{\max} = \frac{\Delta\phi}{\Delta n}$$

يعني

$$grad(\phi) = \nabla\phi = \frac{d\phi}{dn}\hat{a}_n$$

در مختصات مستطيلي

$$\nabla\phi = \hat{a}_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{a}_y\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{a}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

در مختصات استوانه اي

$$\nabla\phi = \hat{a}_r \frac{\partial\phi}{\partial r} + \hat{a}_\phi \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} + \hat{a}_z \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

در مختصات كروي

$$\nabla\phi = \hat{a}_R \frac{\partial\phi}{\partial R} + \hat{a}_\theta \frac{1}{R}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \hat{a}_\varphi \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$$

قضايائي بر روي توابع برداري

- فضاي صفر (Null)

$$\nabla\times\nabla\phi = 0$$
$$\nabla.\left(\nabla\times\vec{F}\right) = 0$$

- قضيه گاوس (ديورژانس)

براي هر سطح بسته s كه شامل حجم v است.

$$\int_v \nabla.\vec{F}dv = \oint_s \vec{F}.d\vec{s}$$

- قضيه استوكس Stokes

براي هر مسير بسته c كه شامل سطح باز s است.

$$\int_s \nabla\times\vec{F}.\overrightarrow{ds} = \oint_c \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

- قضيه هلمهولتس Helmholtz

با توجه به شكل رياضي اين قضيه در محيط نامحدود

$$\vec{F}\left(\vec{R}\right) = -\nabla\int_v \frac{\nabla'.\vec{F}\left(\vec{R}'\right)}{4\pi\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}dv' + \nabla\times\int_v \frac{\nabla'\times\vec{F}\left(\vec{R}'\right)}{4\pi\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}dv'$$

اين قضيه چنين بيان مي‌شود كه هر ميدان برداري توسط پخشش و پيچش (ديورژانس و كرل) ميدان كاملاً مشخص مي‌شود يعني براي مشخص كردن كامل ميدان $\vec{F}$ فقط نياز به داشتن $\nabla\times\vec{F}$ و $\nabla.\vec{F}$ است.

بيان ديگر: يك ميدان برداري يا تابع برداري را مي‌توان بصورت مجموع گراديان يك تابع اسكالر و كرل يك تابع برداري نوشت $\vec{F} = -\nabla V + \nabla\times\vec{A}$

مثال‌هاي كاربردي قضاياي فوق در آخر فصل ارائه خواهد شد.

مشتقات مرتبه بالاتر

علاوه بر قضاياي صفر، لاپلاسين نيز يك مشتق از مرتبه بالاتر مي‌باشد:

$$\nabla^2\phi = \nabla.\left(\nabla\phi\right)$$

مثلاً در مختصات مستطيلي

$$\nabla.\nabla\phi = \nabla.\left(\hat{a}_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{a}_y\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{a}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\hat{a}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(\hat{a}_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{a}_y\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{a}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

در مختصات استوانه‌اي

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{d\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

در مختصات کروي
$$\nabla^2\phi = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\phi}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{d\theta}\right)+\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

نوع دیگر مشتقات از درجه بالاتر

$$\nabla\times\nabla\times\vec{F} = \nabla\left(\nabla.\vec{F}\right)-\nabla^2\vec{F}$$

که در آن (مختصات مستطیلي)

$$\nabla^2\vec{F} = \hat{a}_x\left(\frac{\partial^2F_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2F_x}{\partial z^2}\right)+\hat{a}_y\left(\frac{\partial^2F_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F_y}{dy^2}+\frac{\partial^2F_y}{\partial z^2}\right)+\hat{a}_z\left(\frac{\partial^2F_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2F_z}{\partial z^2}\right)$$

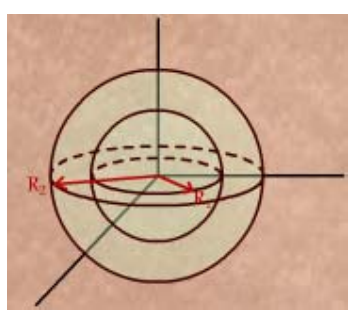
- برخي روابط مشتق‌گيري

$$\nabla.\left(\phi\vec{F}\right) = \phi\nabla.\vec{F}+\nabla\phi.\vec{F}$$
$$\nabla\times\left(\phi\vec{F}\right) = \phi\nabla\times\vec{F}+\nabla\phi\times\vec{F}$$
$$\nabla.\left(\vec{A}+\vec{B}\right) = \nabla.\vec{A}+\nabla.\vec{B}$$
$$\nabla\times\left(\vec{A}+\vec{B}\right) = \nabla\times\vec{A}+\nabla\times\vec{B}$$

مثال ۱: يك ابر الكتروني در ناحية بين دو كره هم مركز (در مبدأ مختصات) به شعاع‌هاي۲ و ۵ سانتيمتر داراي چگالي بار $\rho = \frac{-3\times10^{-8}}{R^4}\cos^2\phi \quad {}^{c}\!/_{m^3}$ مستقر شده‌اند مطلوبست محاسبه كل بار محصور شده در اين ناحيه.

$$Q = \int_v \rho dv'$$
$$dv' = R'^2\sin\theta' dR' d\theta' d\varphi'$$
$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{0.02}^{0.05}\frac{-3\times10^{-8}\cos^2\varphi'}{R'^4}R'^2\sin\theta' dR' d\theta' d\varphi'$$
$$= -3\times10^{-8}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{0.02}^{0.05}\frac{1}{R'^2}\cos^2\varphi'\sin\theta' dR' d\theta' d\varphi'$$
$$= -3\times10^{-8}\left[\frac{\varphi'}{2}+\frac{\sin2\varphi'}{4}\right]_0^{2\pi}\times\left[-\cos\theta'\right]_0^{\pi}\times\left[-\frac{1}{R'}\right]_{0.02}^{0.05}$$
$$= -1.8\pi \quad \mu c$$

مثال ۲: براي تابع برداري داده شده $\vec{F} = \hat{a}_R KR$، تعيين كنيدكه آيا قضيه ديورژانس براي ناحيه محصور شده توسط سطح‌هاي كروي در $R = R_1$ و $R = R_2$ (به نحويكه $R_2 \rangle R_1$) هم مركز در مبدأ مختصات همانطور كه در شكل نشان داده شده است، صادق مي‌باشد؟ (kعدد ثابت)



$$\oint_s \vec{F}.\overrightarrow{ds} = \int_{s_2}\vec{F}.d\vec{s}+\int_{s_1}\vec{F}.d\vec{s}$$

$$S_1 : R = R_1 \quad , \quad d\vec{s}_1 = -d\vec{s}_R = -\hat{a}_R R_1^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\int \left(\vec{F}.\overrightarrow{ds}\right)\Big|_{s_1} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (KR_1)\hat{a}_R.(-\hat{a}_R R_1^2 \sin\theta d\theta d\varphi) = -4\pi K R_1^3$$

$$S_2 : R = R_2 \quad , \quad d\vec{s}_2 = d\vec{s}_R = \hat{a}_R R_2^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\int \left(\vec{F}.d\vec{s}\right)\Big|_{s_2} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (KR_2)\hat{a}_R.\hat{a}_R R_2^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi K R_2^3$$

بنابراین

$$\oint_s \vec{F}.d\vec{s} = 4\pi k\left(R_2^3 - R_1^3\right)$$

اما

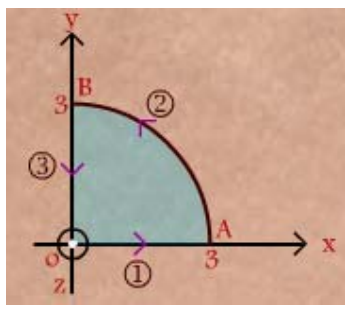
$$\nabla.\vec{F} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 F_R\right) + 0 + 0 = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(KR^3\right) = 3K$$

$$\int_v \nabla.\vec{F} dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{R_1}^{R_2} 3K \underbrace{R^2 \sin\theta dR d\theta d\varphi}_{dv} = 3k\left[\frac{4\pi}{3}\left(R_2^3 - R_1^3\right)\right] = 4\pi k\left(R_2^3 - R_1^3\right)$$

$$\Rightarrow \quad \oint_s \vec{F}.d\vec{s} = \int_v \nabla.\vec{F} dv$$

مثال ۳:

براي بردار داده شد $\vec{F} = \hat{a}_x xy - \hat{a}_y 2x$ صحت قضيه استوكس روي يك ربع ديسك به شعاع ۳ كه در ناحيع اول دستگاه مختصات قرار دارد را بررسي كنيد.



$$\int_c \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \int_0^A \vec{F}.\overrightarrow{dl} + \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl} + \int_B^0 \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

مسير ۱:

$$y = 0 \quad , \quad dy = 0 \quad , \quad d\vec{l} = \hat{a}_x dx$$

$$\Rightarrow \vec{F}.d\vec{l} = \left(-\hat{a}_y 2x\right).\left(\hat{a}_x dx\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^A \vec{F}.d\vec{l} = 0$$

مسير ۲: قبلاً در مثالي محاسبه گرديد.

$$\int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = -9\left(1 + \pi/2\right)$$

مسير ۳:

$$x = 0 \quad , \quad dx = 0 \quad , \quad d\vec{l} = -\hat{a}_y dy \quad , \quad F = 0$$

$$\Rightarrow F d\vec{l} = (0).d\vec{l} = 0 \Rightarrow \int_B^0 \vec{F}.d\vec{l} = 0$$

بنابراين

$$\oint_c \vec{F}.d\vec{l} = -9\left(1 + \pi/2\right)$$

اما

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xy & -2x & 0\end{vmatrix}=\hat{a}_x(0)-\hat{a}_y(0)=\hat{a}_z\left(\frac{\partial(-2x)}{\partial x}-\frac{\partial(xy)}{\partial y}\right)=\hat{a}_z(-2-x)$$

$$\int_s \nabla\times\vec{F}.d\vec{s} \quad , \quad d\vec{s}_z=\hat{a}_z dxdy$$

$$\int_s \nabla\times\vec{F}.d\vec{s}=\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}}-(2+x)dxdy=-\int_0^3\left[2\sqrt{9-y^2}+\frac{1}{2}(9-y^2)\right]dy$$

$$=-\left[y\sqrt{9-y^2}+9\sin^{-1}\frac{y}{3}+\frac{9}{2}y-\frac{y^3}{9}\right]_0^3=-9\left(1+\pi/2\right)$$

روش دیگر: محاسبه در مختصات استوانه‌اي

$$\nabla\times\vec{F}=-\hat{a}_z(2+x)=\hat{a}_z(2+r\cos\varphi)$$

$$d\vec{s}=\hat{a}_z rdrd\varphi$$

$$\int_s \nabla\times\vec{F}.d\vec{s}=\int_0^{\pi/2}\int_0^3 -(2+r\cos\varphi)rdrd\varphi=-\int_0^{\pi/2}\int_0^3 2rdrd\varphi-\int_0^{\pi/2}\int_0^3 r^2\cos\varphi drd\varphi$$

$$=-\frac{\pi}{2}\left(r^2\right)\Big]_0^3+\left(\frac{1}{3}r^3\right]_0^3\left[-\sin\varphi\right]_0^{\pi/2}$$

$$=-9\times\pi/2-9\times1=-9\left(1+\pi/2\right)$$

بنابراین

$$\oint_c \vec{F}.\vec{dl}=\int_s \nabla\times\vec{F}.d\vec{s}$$